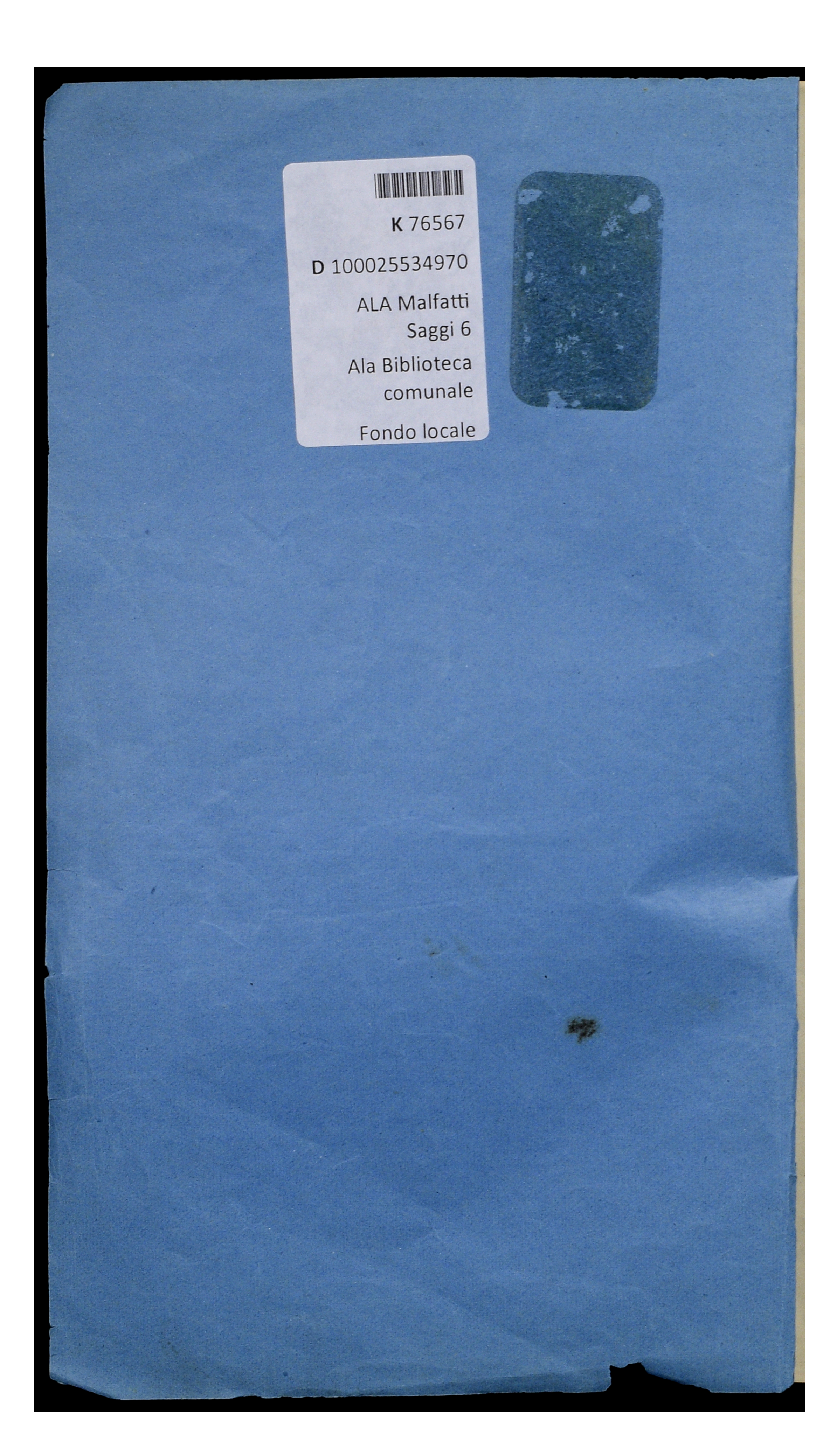
Herrn Geh. Rath Schröter
mit hochachtungsvollem Gruss
d. Verf.



BERICHTE

DER

K. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

SITZUNG AM 11. FEBRUAR 1889.

C. Neumann, *Ueber das Malfatti'sche Problem.*

Ist irgend ein Dreieck mit den Seiten α, β, γ gegeben, so kann man zunächst dieses Dreieck durch die Halbirungslinien α_1, β_1, γ_1 seiner Innenwinkel in drei kleinere Dreiecke zerlegen, und sodann für jedes dieser drei kleineren Dreiecke den einbeschriebenen Kreis construiren. Bezeichnet man diese Kreise mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so werden die beiden Kreise $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, ausser α_1, noch eine zweite gemeinschaftliche innere Tangente besitzen, welche α_2 heissen mag. In analoger Weise mögen β_2 und γ_2 definirt sein. Ist also das ursprüngliche Dreieck $\alpha\beta\gamma$ *gegeben*, so werden die Linien und Kreise α_1, β_1, γ_1, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, α_2, β_2, γ_2 ebenfalls als *gegeben* zu betrachten sein.

Das *Malfatti'sche Problem* besteht nun darin, in das gegebene Dreieck $\alpha\beta\gamma$ drei Kreise ξ, η, ζ hineinzulegen, der Art, dass ξ die beiden Kreise η, ζ und zugleich auch die beiden Dreiecksseiten β, γ berührt, und dass ferner η und ζ den analogen Anforderungen entsprechen. Bezeichnet man die gegenseitigen Berührungspunkte dieser noch unbekannten Kreise ξ, η, ζ mit x, y, z, ferner die Tangenten der Kreise ξ, η, ζ in den Punkten x, y, z mit α_3, β_3, γ_3, so wird man offenbar die Kreise ξ, η, ζ ohne Weiteres construiren können, falls man nur die Linien α_3, β_3, γ_3 zu construiren im Stande ist.

Eine Construction der Linien α_3, β_3, γ_3 und zwar eine Construction von überraschender Einfachheit ist aber bekanntlich von Steiner gegeben worden im Jahre 1826. *Steiner gelangte nämlich in dieser Beziehung zu dem höchst merkwürdigen Satz, dass α_3, β_3, γ_3 identisch sind mit α_2, β_2, γ_2.* Um diesen Steiner'schen Satz zu beweisen, wird darzuthun sein, dass z. B. α_3 die beiden Kreise $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ berührt. Kurz es wird darzuthun sein, dass die Linien α_3, β_3, γ_3 folgende Eigenschaften besitzen:

$$(E.)\quad \begin{cases} \alpha_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}, \\ \beta_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{C},\ \mathfrak{A}, \\ \gamma_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{A},\ \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Steiner hat bekanntlich im Jahre 1826 den in Rede stehenden Satz d. i. die Eigenschaften (*E.*) *ohne* Beweis publicirt. Unter den seit jener Zeit gefundenen Beweisen sind mir genauer bekannt die von Schröter[1]), Bischoff[2]) und Petersen[3]). Und unter diesen drei Beweisen ist nach meinem Dafürhalten der Schröter'sche als der einfachste zu bezeichnen. Doch dürfte derselbe wohl einer noch weiteren Vereinfachung fähig sein.

Die Betrachtungen nämlich, deren Schröter bei Führung seines Beweises sich bedient, entspringen aus zwei verschiedenen Quellen, einerseits aus der *Theorie der reciproken Radien*, und andererseits aus der *Theorie der Aehnlichkeitspunkte*. Von diesen beiden Quellen aber kann die letztere vollkommen ausgeschaltet werden. Und hierdurch erlangt alsdann, wie ich im gegenwärtigen Aufsatz zu zeigen beabsichtige, der Schröter'sche Beweis nicht allein eine sehr bedeutende Abkürzung, sondern vor allen Dingen auch eine viel grössere Einfachheit und Uebersichtlichkeit, indem derselbe alsdann nur noch auf der *Theorie der reciproken Radien* beruht. Um näher hierauf einzugehen, mag es mir zuvörderst gestattet sein, zwei ganz elementare Hülfssätze voranzuschicken.

Erster Hülfssatz. — *Es seien P, Q, σ, τ vier Kreise. Der Kreis σ mag die beiden Kreise P, Q gleichartig berühren. Und ebenso mag auch τ jene beiden Kreise P, Q gleichartig berühren. Alsdann bilden die vier Berührungspunkte stets ein Kreisviereck.* — Der Beweis dieses Satzes kann in sehr einfacher Weise dadurch erhalten werden, dass man die beiden Kreise P, Q durch

---

1) Schröter: Die Steiner'sche Auflösung der Malfatti'schen Aufgabe. 1874. Crelle's Journal. Bd. 77. Seite 230. Diese Schröter'schen Untersuchungen haben eine weitere Vervollständigung erhalten durch den kurzen aber inhaltsreichen Aufsatz von Godt: Ueber die Steiner'sche Verallgemeinerung des Malfatti'schen Problems. Crelle's Journ. Bd. 84. S. 259.

2) Der von Prof. Bischoff in München gegebene Beweis ist mir nur durch ein Manuscript bekannt geworden.

3) Petersen: Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Constructionsaufgaben, ins Deutsche übertragen von Dr. von Fischer-Benzon. Kopenhagen. 1879. Daselbst auf Seite 102—104.

die Methode der reciproken Radien in zwei gleich grosse Kreise verwandelt.

Zweiter Hülfssatz. — *Denkt man sich beliebig viele gerade Linien, die alle isogonal sind zu einem gegebenen Kreise, so wird stets ein mit diesem Kreise concentrischer Kreis existiren, welcher all' jene geraden Linien berührt.* — Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich sofort, und bedarf keiner weiteren Erläuterung.

Um nun den Beweis der Eigenschaften $(E.)$ wirklich zu führen, bezeichnen wir diejenigen Punkte, in denen die Dreiecksseiten α, β, γ von den Malfatti'schen Kreisen berührt werden mit A, A, B, B, C, C, unter Beifügung passender Indices. Es mögen nämlich A_η und A_ζ diejenigen Punkte heissen, in denen die Dreiecksseite α von den beiden Malfatti'schen Kreisen η und ζ berührt wird. Und in analoger Art mögen B_ζ, B_ξ und C_ξ, C_η definirt sein. Alsdann werden die beiden Kreise η und ζ einerseits von α berührt, in den Punkten A_η und A_ζ, andererseits aber auch vom Kreise ξ berührt, in den Punkten z und y. Die vier genannten Punkte A_η, A_ζ, y, z müssen daher, zufolge des ersten Hülfssatzes, ein *Kreisviereck* bilden. Bezeichnen wir also den betreffenden Kreis selber mit U, und definiren wir in analoger Weise die Kreise V und W, so werden U, V, W respective durch folgende Punkte hindurchgehen:

$$(1.)\qquad \begin{array}{l} U \twoheadrightarrow y,\ z,\ A_\eta,\ A_\zeta\ , \\ V \twoheadrightarrow z,\ x,\ B_\zeta,\ B_\xi\ , \\ W \twoheadrightarrow x,\ y,\ C_\xi,\ C_\eta\ . \end{array}$$

Der Kreis U schneidet den Kreis ζ in den beiden Punkten A_ζ und y, d. i. in denjenigen beiden Punkten, in denen der Kreis ζ respective von α und β_3 berührt wird. Folglich wird der Kreis U diese beiden Linien α und β_3 unter *gleichen* Winkeln schneiden; was angedeutet sein mag durch die Formel:

$$(2.)\qquad U \text{ isogonal zu } \alpha,\ \beta_3\ .$$

Gleichzeitig wird offenbar, zufolge der Symmetrie unserer Betrachtungen und Bezeichnungen, auch folgende analoge Formel zu notiren sein:

$$(3.)\qquad U \text{ isogonal zu } \alpha,\ \gamma_3\ .$$

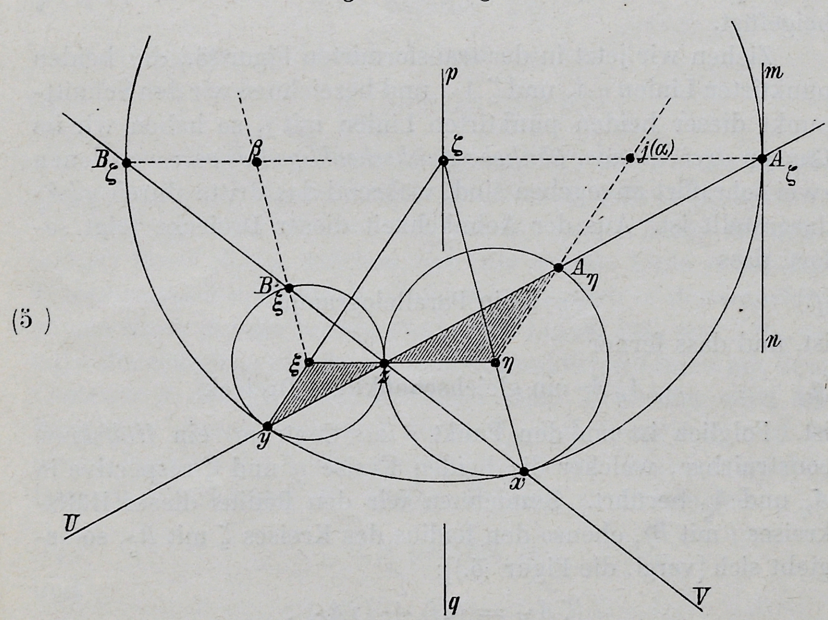
Um nun in unserer Untersuchung einen Schritt vorwärts zu kommen, wollen wir die aus den Linien, Kreisen und Punkten

(4.) $\alpha, \beta, \gamma\,, \quad \xi, \eta, \zeta\,, \quad x, y, z\,, \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3\,, \quad U, V$

bestehende Figur[1]) in eine etwas *einfachere* Figur zu verwandeln suchen durch Anwendung der Methode der reciproken Radien. Die beiden Kreise U und V schneiden sich, ausser in z, noch in einem zweiten Punkte, welcher O heissen mag. Transformiren wir also die Figur (4.) von diesem Punkte O aus, nach der Methode der reciproken Radien, so werden wir dadurch den Vortheil erhalten, dass jene beiden durch O gehenden Kreise U und V in *gerade Linien* sich verwandeln.

Die transformirte Figur sei dargestellt durch:

(5.)



Es mögen nämlich in dieser transformirten Figur die Centra der Kreise ξ, η, ζ mit ebendenselben Buchstaben ξ, η, ζ bezeichnet sein; so dass also die Berührungspunkte x, y, z respective auf den Centrallinien $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$ oder auf den Verlängerungen derselben anzutreffen sind. Die Kreise U, V verwandeln sich, wie schon bemerkt wurde, bei der Transformation in *gerade*

1) Der Leser wird gebeten, diese Figur (4.), welche weiterhin die *ursprüngliche* Figur heissen soll, wirklich zu zeichnen.

Linien. Und zwar werden, weil U und V [vergl. (1.)] respective durch die Punkte y, z und x, z hindurchgehen, die durch die Transformation entstehenden *geraden Linien* U und V respective durch die geraden Linien yz und xz dargestellt sein, [vergl. die in (5.) gegebene Zeichnung]. Der Kreis U geht [vergl. (1.)] durch die vier Punkte y, z, A_η, A_ζ hindurch; und zwar sind y und A_ζ seine Schnittpunkte mit dem Kreise ζ, andererseits z und A_η seine Schnittpunkte mit dem Kreise η. Gleiches gilt daher in der transformirten Figur von der *geraden Linie U.* Und demgemäss sind in dieser transformirten Figur (5.) den Schnittpunkten der geraden Linie U die Buchstaben y, z, A_η, A_ζ beigefügt. Ueberdies sind daselbst in analoger Weise den Schnittpunkten der geraden Linie V die Buchstaben x, z, B_ξ, B_ζ beigefügt.

Ziehen wir jetzt in der transformirten Figur (5.) die beiden punktirten Linien ηA_η und ζA_ζ, und bezeichnen wir den Schnittpunkt dieser beiden punktirten Linien mit j, so haben wir im Ganzen *drei einander ähnliche gleichschenklige Dreiecke*, von denen zwei schraffirt angegeben sind, während das dritte durch $y\zeta A_\zeta$ dargestellt ist. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt sofort, dass

(*f.*) $\xi\eta j\zeta$ ein Parallelogramm

ist, und dass ferner

(*g.*) $jA_\eta A_\zeta$ ein gleichschenkliges Dreieck

ist. Folglich ist um den Punkt j (als Centrum) ein *Hülfskreis* construirbar, welcher die beiden Kreise η und ζ respective in A_η und A_ζ berührt. Bezeichnen wir den Radius dieses Hülfskreises j mit R_j, ebenso den Radius des Kreises ζ mit R_ζ, so ergiebt sich [vergl. die Figur (5.)]:

$$(\zeta A_\zeta) = (\zeta j) + (jA_\zeta)\ ,$$
$$\text{d. i.}\quad R_\zeta = (\zeta j) + R_j\ ,$$
$$\text{d. i.}\quad R_j = R_\zeta - (\zeta j)\ .$$

Die letzte Formel aber ist, mit Rücksicht auf die aus (*f.*) entspringende Gleichung $(\zeta j) = (\xi\eta)$, auch so darstellbar:

(*h.*) $$R_j = R_\zeta - (\xi\eta)\ .$$

Um nun die eigentliche Natur des Hülfskreises j zu erkennen, müssen wir uns daran erinnern, dass α in der *ursprünglichen*

Figur (4.) eine gerade Linie repräsentirt, welche die Kreise η und ζ respective in den Punkten A_η und A_ζ berührt. In der *transformirten* Figur (5.) wird daher α ein *Kreis* sein, welcher ebenfalls die Kreise η und ζ respective in A_η und A_ζ berührt. Hieraus aber folgt sofort, dass dieser Kreis α in der transformirten Figur (5.) nichts Anderes ist, als der schon besprochene Hülfskreis j. Demgemäss erscheint es angemessen, den Buchstaben j fortan fallen zu lassen, denselben nämlich zu ersetzen durch α; wie solches in der Figur (5.) angedeutet sein soll durch das dem j in Parenthese beigefügte α. Bei dieser Abänderung der Bezeichnungsweise ergiebt sich aus (f.), dass $\xi\eta\alpha\zeta$ ein Parallelogramm, mithin z. B.

$$(F.) \qquad \zeta\alpha \text{ parallel } \xi\eta$$

ist. Gleichzeitig ergiebt sich alsdann aus (h.):

$$(H.) \qquad R_\alpha = R_\zeta - (\xi\eta);$$

und zwar ist in diesen Formeln (F.) und (H.) unter α der Mittelpunkt, und unter R_α der Radius des Kreises α zu verstehen.

Analoges wird offenbar zu bemerken sein in Bezug auf denjenigen Kreis β, in welchen sich die gerade Linie β bei der Transformation verwandelt. Zieht man nämlich in der transformirten Figur (5.) die beiden punktirten Linien ξB_ξ und ζB_ζ, so wird der Schnittpunkt dieser beiden punktirten Linien mit dem Centrum β des Kreises β identisch sein. Ueberdies wird die Peripherie dieses Kreises β durch B_ξ und B_ζ gehen, und in diesen Punkten die Kreise ξ und ζ berühren. Zugleich werden folgende mit (F.) und (H.) analoge Formeln zu notiren sein:

$$(F_1.) \qquad \zeta\beta \text{ parallel } \xi\eta,$$

und

$$(H_1.) \qquad R_\beta = R_\zeta - (\xi\eta),$$

wo β den Mittelpunkt, und R_β den Radius des Kreises β vorstellen.

Aus (F.), (F_1.), und (H.), (H_1.) folgt nun sofort:

$$(J.) \qquad \zeta\alpha \text{ parallel } \zeta\beta$$

und

$$(K.) \qquad R_\alpha = R_\beta.$$

Die Formel ($J.$) zeigt, dass die fünf Punkte A_ζ, α, ζ, β, B_ζ in *gerader Linie* liegen, dass dieselben also einen *Durchmesser* des Kreises ζ repräsentiren. Andererseits zeigt die Formel ($K.$), dass die beiden Kreise α und β, welche den Kreis ζ in den Endpunkten dieses Durchmessers berühren, beide *gleichgross* sind. Construiren wir also im Kreise ζ den zum Durchmesser $A_\zeta \alpha \zeta \beta B_\zeta$ senkrechten Durchmesser $p \zeta q$ [vergl. die Figur (5.)], so wird dieser letztere zu bezeichnen sein als eine *Symmetrielinie* der beiden Kreise α, β.

Denken wir uns in der *ursprünglichen* Figur, ausser dem Kreise ζ, noch beliebig viele andere Kreise $\zeta', \zeta'', \zeta''', \cdots$ construirt, welche alle, ebenso wie ζ, die beiden Linien α, β, und zwar in der nämlichen Weise wie ζ, berühren, so werden offenbar all' diese Kreise ζ, ζ', ζ'', ζ''', $\cdots$ von der Halbirungslinie γ_1 des Winkels $\alpha\beta$ *senkrecht* geschnitten werden. Analoges muss daher auch in der *transformirten* Fig. (5.) stattfinden. Es muss daher die Linie γ_1 bei der Transformation in einen Kreis γ_1 sich verwandeln, welcher die Eigenschaft hat, orthogonal zu sein nicht nur zum Kreise ζ, sondern auch zu all' denjenigen Kreisen ζ', ζ'', ζ''', $\cdots$, welche die beiden Kreise α und β in der nämlichen Weise wie ζ berühren. Nun sind aber, wie wir gefunden haben, die Kreise α und β in der transformirten Figur (5.) *gleichgross*. Folglich muss der Kreis γ_1 daselbst dargestellt sein durch die *Symmetrielinie* der beiden Kreise α, β, also dargestellt sein durch den schon construirten *Durchmesser* $p \zeta q$.

Legen wir jetzt in der transformirten Figur (5.) im Punkte A_ζ eine Tangente mn an die daselbst einander berührenden Kreise ζ und α, so ist offenbar:

$$mn \text{ parallel } pq \,.$$

Folglich werden diese beiden Linien mn und pq von der Transversalen U unter *gleichen* Winkeln geschnitten. Also:

$$U \text{ isogonal zu } mn,\ pq \,.$$

Diese Formel kann, weil mn Tangente des Kreises α im Punkte A_ζ, andererseits aber pq, wie soeben bemerkt wurde, identisch mit γ_1 ist, auch so geschrieben werden:

$$(6.) \qquad U \text{ isogonal zu } \alpha,\ \gamma_1 \,.$$

Selbstverständlich muss diese für die *transformirte* Figur

gefundene Formel (6.) auch gültig sein für die *ursprüngliche* Figur. Denken wir uns dieselbe aber auf diese letztere Figur bezogen, so muss, wie aus der Symmetrie unserer Bezeichnungen ohne Weiteres sich ergiebt, auch folgende analoge Formel stattfinden:

(7.) $$U \text{ isogonal zu } \alpha, \beta_1 .$$

Durch Zusammenfassung der vier für die *ursprüngliche* Figur erhaltenen Formeln (2.), (3.) und (6.), (7.) erhalten wir nun sofort:

(8.) $$U \text{ isogonal zu } \alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3 .$$

In der ursprünglichen Figur schneidet also der Kreis U die fünf geraden Linien α, β_1, γ_1, β_3, γ_3 unter *gleichen* Winkeln. Zufolge unseres zweiten Hülfssatzes muss daher ein mit U concentrischer Kreis U_0 existiren, welcher die Eigenschaft hat, jene fünf geraden Linien zu berühren. Also:

(9.) $$U_0 \text{ tangential zu } \alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3 .$$

Dieser Kreis U_0 berührt also z. B. auch die drei Linien α, β_1, γ_1, und wird daher, wie aus der Definition des Kreises $\mathfrak{A}$ folgt, identisch sein mit $\mathfrak{A}$. Somit gewinnt die Formel (9.) folgende Gestalt:

(10.) $$\mathfrak{A} \text{ tangential zu } \alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3 .$$

In analoger Weise werden sich nun offenbar analoge Formeln ergeben für die Kreise $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$; so dass wir also, Alles zusammengefasst, folgende drei Formeln erhalten:

(11.) $$\begin{aligned} &\mathfrak{A} \text{ tangential zu } \alpha, \beta_1, \gamma_1, \beta_3, \gamma_3 , \\ &\mathfrak{B} \text{ tangential zu } \beta, \gamma_1, \alpha_1, \gamma_3, \alpha_3 , \\ &\mathfrak{C} \text{ tangential zu } \gamma, \alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3 . \end{aligned}$$

Hieraus aber folgt sofort:

(12.) $$\begin{aligned} &\alpha_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{B}, \mathfrak{C} , \\ &\beta_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{C}, \mathfrak{A} , \\ &\gamma_3 \text{ tangential zu } \mathfrak{A}, \mathfrak{B} . \end{aligned}$$

Und dies sind die zu beweisenden Eigenschaften (E.) der Linien α_3, β_3, γ_3. [Vergl. die zweite Seite dieses Aufsatzes.]

Bemerkung.

Der auf der ersten Seite dieses Aufsatzes angegebene *Steiner'sche Satz*, dass α_3, β_3, γ_3 mit α_2, β_2, γ_2 identisch sind, gilt auch dann noch, wenn die von Hause aus gegebenen Linien α, β, γ nicht *gerade* Linien, sondern *Kreise* sind. Nur hat man in diesem allgemeineren Falle in den Definitionen von α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2. α_3, β_3, γ_3 gewisse Abänderungen eintreten zu lassen. Setzt man der Einfachheit willen voraus, dass von den gegebenen Kreisen α, β, γ jeder ausserhalb der beiden andern liegt, so sind diese Abänderungen folgende:

I. — Bezeichnet ϱ den gemeinschaftlichen Orthogonalkreis jener drei von Hause aus gegebenen Kreise α, β, γ, so hat man unter α_1, β_1, γ_1 nicht mehr gerade Linien, sondern *zu ϱ orthogonale Kreise* zu verstehen. Insbesondere hat man unter α_1 die senkrechte Trajectorie all' derjenigen Kreise zu verstehen, welche die beiden gegebenen Kreise β und γ gleichartig berühren oder auch unter gleichen Winkeln schneiden. Und in analoger Weise hat man β_1 und γ_1 zu definiren.

II. — Was $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, α_2, β_2, γ_2 und ξ, η, ζ, α_3, β_3, γ_3 anbetrifft, so hat man unter α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 nicht mehr gerade Linien, sondern *zu ϱ orthogonale Kreise* zu verstehen, im Uebrigen aber die für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, α_2, β_2, γ_2, ξ, η, ζ, α_3, β_3, γ_3 gegebenen Definitionen beizubehalten.

Solches festgesetzt, werden alsdann die vorhin angestellten Betrachtungen, abgesehen von gewissen leicht sich ergebenden Modificationen, Schritt für Schritt in Gültigkeit bleiben, und zu dem Resultat führen, dass auch in diesem allgemeineren Falle α_3, β_3, γ_3 mit α_2, β_2, γ_2 *identisch* sind.

